RESOLUCIÓN GRÁFICA DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA EN R^2

Inmaculada Concepción Masero Moreno 2022
https://doi.org/10.35466/RA2022n6899

Resolución gráfica de problemas

de Programación Matemática en R^2.

Introducción……………………………………………………………………. 5

Bloque I

Resolución gráfica de problemas de optimización sin restricciones en R^2 ……... 7

Ejemplo 1…………… 12

Ejemplo 2…………… *15*

Ejemplo 3…………… 19

Ejemplo 4…………… 23

Bloque II

Resolución gráfica de problemas de optimización con restricciones en R^2……... 27

Ejemplo 5…………… 32

Ejemplo 6…………… 35

Ejemplo 7…………… 37

ÍNDICE DE FIGURAS (VÍDEOS).

Bloque I

Resolución gráfica de problemas de optimización sin restricciones en R^2……… 41

Bloque II

Resolución gráfica de problemas de optimización con restricciones en R^2……... 47

Introducción.

La Teoría de la Optimización de funciones se ocupa del estudio de los óptimos de las funciones y de los diferentes procedimientos matemáticos que utilizan para obtenerlos. Esta parte de las Matemáticas es de las más importantes en la Economía y la Empresa por su aplicación en los problemas que abordan el cálculo del valor de las variables que optimizan el resultado de una magnitud económica que depende de ellas. En este tipo de situaciones es fundamental identificar claramente la función cuyo valor se desea optimizar y las variables de las que depende, siendo necesario conocer la relación entre estas. De hecho, las variables suelen estar sujetas a determinadas condiciones que pueden ser formuladas matemáticamente como restricciones.

Existen distintos tipos de problemas de optimización dependiendo del tipo de variables, de las ecuaciones que definen las restricciones o de las funciones a optimizar. Los problemas determinísticos en los que interviene un solo decisor y existe una única función a optimizar se encuadran dentro de la Programación Matemática, cuyo objetivo es el análisis y resolución de estos problemas.

El objetivo de este material es mostrar el desarrollo de la resolución geométrica de los problemas de Programación Matemática cuyas funciones tienen dos variables continuas. El material se ha organizado en dos bloques. Ambos bloques comienzan con un breve desarrollo teórico que situé al lector en el contexto de los problemas que abordan. En el primer bloque se plantean cuatro ejemplos cuyos problemas en los que no se impone ninguna restricción sobre las variables, es decir, estas pueden tomar cualquier valor en el dominio de definición de la función a optimizar. El segundo bloque recoge la resolución gráfica de tres problemas con restricciones, en los que las variables están sujetas a una serie de restricciones funcionales que pueden ser de igualdad y/o desigualdad.

La resolución gráfica de los problemas de cada ejemplo se ha recogido en una serie de Figuras. Se ha elaborado un vídeo en el que se explica el desarrollo gráfico desarrollado para llegar a cada Figura. En los ejemplos del primer bloque, también se ha incluido la representación gráfica de las funciones a optimizar y un desarrollo gráfico en el que se aborda geométricamente el significado del concepto de curva de nivel y su identificación en el plano.

Cada Figura cuenta con un icono en diferentes colores que recoge un código ZAP único para cada vídeo. Para poder acceder al vídeo debe instalar la App **Zappar** y escanear el icono de la Figura. Esta aplicación nos permite conectar este material con el mundo digital y abrir una ventana a otra dimensión al lector.

Bloque I

Resolución gráfica de problemas de optimización sin restricciones en R^2.

La formulación general de los problemas de Programación Matemática sin restricciones es la siguiente:

$$Opt \quad f(x,\, y)$$

donde:

- $f : D \subseteq R^2 \rightarrow R$ *es* la función por optimizar denominada *función objetivo del problema* y D su dominio
- (x, y) *es* el *vector de variables de decisión* que pertenece al *conjunto factible* $X \subseteq R^2$, que en estos problemas coincide con el dominio de la función objetivo, $X = D$. Cada $(x, y) \in X$ se denomina *solución factible.*

La función tiene un ***mínimo local*** en el punto $(x^*, y^*) \in D$, si existe un entorno de dicho punto $E(x^*, y^*)$, tal que $f(x^*, y^*) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in E(x^*, y^*) \cap D$.

La función tiene un ***máximo local*** en el punto $(x^*, y^*)^* \in D$, si existe un entorno de dicho punto $E(x^*, y^*)$ tal que $f(x^*, y^*) \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in E(x^*, y^*) \cap D$.

La función tiene un ***mínimo global*** en el punto $(x^*, y^*) \in D$, si $f(x^*, y^*) \leq f(x, y)$ para $\forall (x, y) \in D$.

La función tiene un ***máximo global*** en el punto $(x^*, y^*) \in D$, si $f(x^*, y^*) \geq f(x, y)$ para $\forall (x, y) \in D$.

En el caso en que las desigualdades anteriores sean estrictas para $(x, y) \neq (x^*, y^*)$, los óptimos globales son estrictos o únicos.

En estos problemas no está garantizada la existencia de óptimo global.

Supongamos que la función es de clase 1 en su dominio de definición, $f \in C^1(D)$.

La resolución de un problema programación matemática sin restricciones cuya función tiene dos variables puede abordarse geométricamente a partir de la representación gráfica de sus ***curvas de nivel*** y ***su vector gradiente***.

Las curvas de nivel.

La ***curva de nivel k*** ($k \in R$) de la función $f : D \subseteq R^2 \to R$ es el conjunto de puntos (x, y) del dominio de la función cuya imagen toma el valor *k*, es decir,

$$C_k = \{(x, y) \in D \subseteq R^2 \ / \ f(x, y) = k\}$$

La curva de nivel *k* de la función se obtiene como la intersección de la gráfica de la función en R^3 con el plano $z=k$ que es paralelo al plano *XY*.

Se denomina ***mapa de curvas de nivel*** al conjunto de curvas de nivel representadas en el plano *XY* para unos determinados valores de *k*.

El vector gradiente.

Sea la función $f : D \subseteq R^2 \to R$ y D su dominio de definición. Supongamos que la función es diferenciable en el punto $(x_0, y_0) \in D$ y sea $\nabla f(x_0, y_0)$ el vector gradiente de la función en el punto (x_0, y_0).

Si se representa $\nabla f(x_0, y_0)$ en el plano *XY*, este indica la dirección y sentido en el que la función experimenta el crecimiento máximo a partir del punto (x_0, y_0).

Si se representa el vector $-\nabla f(x_0, y_0)$, este indica la dirección y sentido en el que la función experimenta el decrecimiento máximo a partir de dicho punto.

Resolución gráfica.

La resolución gráfica en R^2 de un problema de maximizar sin restricciones parte de la representación en el plano de

- las curvas de nivel
- y el vector gradiente de la función a optimizar (función objetivo) en cualquier punto del dominio de la función.

Este vector indicará la dirección y sentido en el que las curvas de nivel toman valores en los que la función experimenta el crecimiento máximo. Para obtener (en caso de que existan) los puntos del dominio pertenecientes a la curva de nivel correspondiente al nivel máximo, se desplazan las curvas de nivel en la dirección y sentido del vector gradiente.

En el caso en que el problema sea de minimizar, se representan las curvas de nivel y el vector de sentido opuesto al vector gradiente, que indicará la dirección y sentido en el que las curvas de nivel toman valores en los que la función experimenta el decrecimiento máximo. Desplazando las curvas de nivel en la dirección y sentido de dicho vector, se pueden identificar (si existen) los puntos del dominio pertenecientes a la curva de nivel mínimo.

En los problemas de optimización sin restricción no se puede garantizar la existencia de óptimos globales.

Ejemplos

En los siguientes ejemplos se expone cómo encontrar gráficamente los máximos y mínimos de una función de dos variables. Cada ejemplo cuenta con diferentes figuras a las que se ha asociado su correspondiente vídeo.

Las dos primeras figuras y sus dos vídeos correspondientes se dedican a la función y sus curvas de nivel. La primera figura de cada ejemplo corresponde a la representación gráfica de la correspondiente función en R^3. En el vídeo asociado a la segunda figura se realiza el proceso de identificación gráfica de una curva de nivel a partir de la intersección de la función y un plano determinado.

En la tercera figura y vídeo de cada ejemplo comienza la resolución gráfica del problema de optimización $Opt \quad f(x, y)$, representando en el plano el mapa de curvas de nivel de la función. Por último, sobre dicho mapa se representa el gradiente de la función en un punto y su opuesto, y se resuelve gráficamente el problema como se muestra en el vídeo asociado a la cuarta y última figura.

Cada Figura cuenta con un icono en diferentes colores que recoge un código ZAP único para cada vídeo. Para poder acceder al vídeo debe instalar la App **Zappar** en el dispositivo móvil en el que vaya a realizar el visionado y escanear el icono de la Figura.

Ejemplo 1

Sea la función $f(x,y) = x + 2y$.

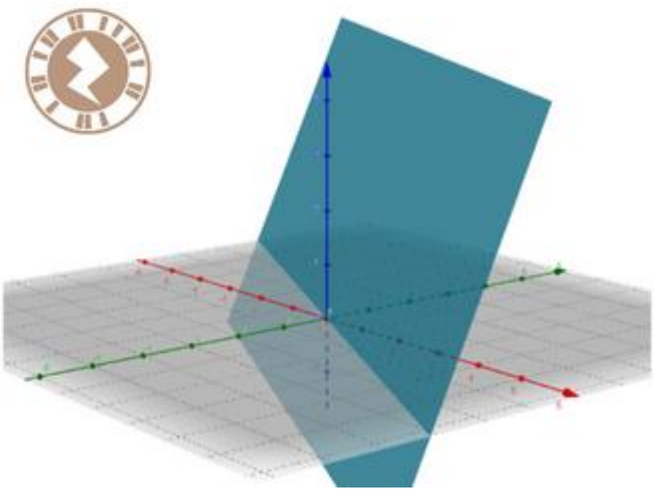
La representación gráfica en R^3 de esta función corresponde a un plano. Para representarla, se asocia a los puntos del dominio de la función (cualquier punto del plano *XY*) el valor de su imagen:

$$\left\{(x,y,z) \in R^3 / z = x + 2y,\ \forall (x,y) \in R^2\right\}$$

Este conjunto también se puede expresar de la forma siguiente:

$$\left\{(x,y,x+2y) \in R^3, \forall (x,y) \in R^2\right\}$$

Figura 1. Representación gráfica de la función $f(x,y) = x + 2y$.

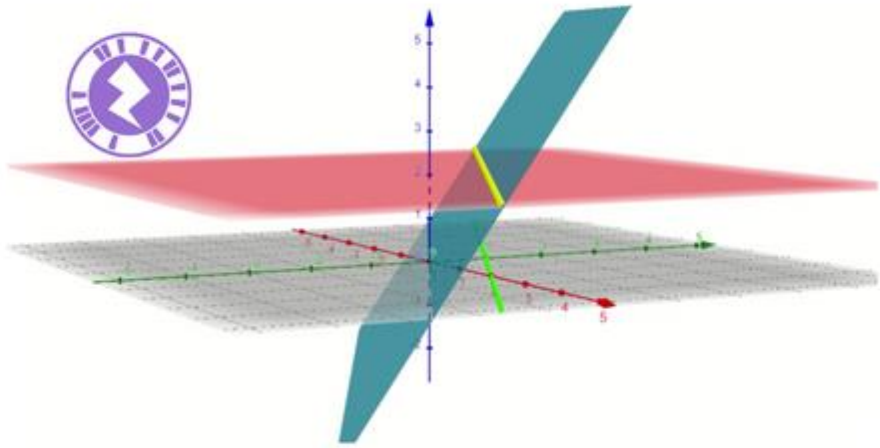


Vamos a calcular una *curva de nivel* en particular, en este caso, de nivel 2:

$$C_2 = \left\{(x,y) \in R^2 \ / \ f(x,y) = 2\right\} = \left\{(x,y) \in R^2 \ / \ x + 2y = 2\right\} = \left\{(x,y) \in R^2 \ / \ y = 1 - \frac{x}{2}\right\}$$

Los puntos de R^2 que pertenecen a la *curva de nivel 2* verifican la ecuación $y = 1 - \frac{x}{2}$, que corresponde a una recta cuya pendiente es $-\frac{1}{2}$.

Figura 2. Desarrollo gráfico de la *curva de nivel 2* de la función $f(x, y) = x + 2y$.



Vamos a identificar gráficamente los óptimos de la función $f(x, y) = x + 2y$, es decir, vamos a resolver gráficamente el siguiente problema

$$Opt \quad x + 2y$$

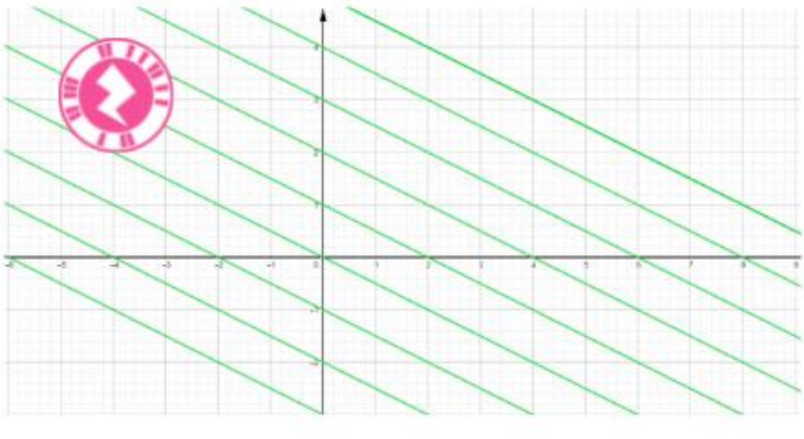
Comenzaremos representando en el plano el mapa de curvas de nivel de la función. La expresión de la ***curva de nivel k*** es:

$$C_k = \left\{(x, y) \in R^2 \,/\, f(x, y) = k\right\} = \left\{(x, y) \in R^2 \,/\, x + 2y = k\right\} = \left\{(x, y) \in R^2 \,/\, y = \frac{k}{2} - \frac{x}{2}\right\}$$

para cualquier valor de $k \in R$.

El *mapa de curvas de nivel* de esta función está formado por las rectas de pendiente $-\frac{1}{2}$ que se representa en la Figura 3.

Figura 3. Representación de las *curvas de nivel* de la función $f(x, y) = x + 2y$.



Calculamos el ***vector gradiente*** de la función

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Al no depender del valor de las variables, el vector gradiente es el mismo en todos los puntos del dominio de la función. Lo calculamos, por ejemplo, en el punto (1,1):

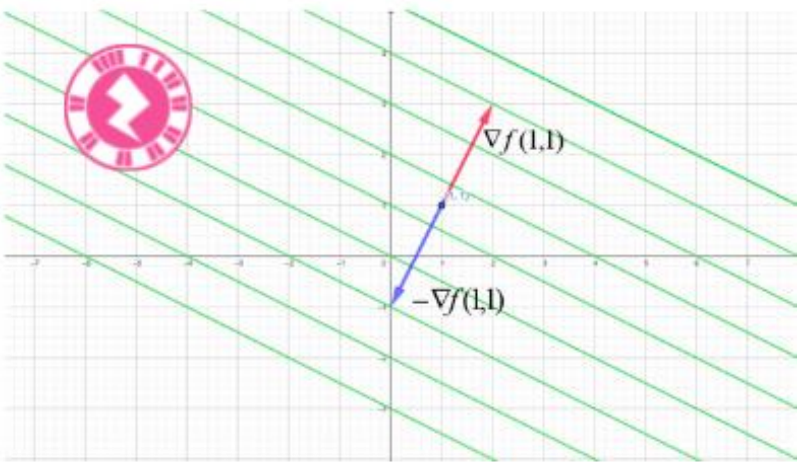
$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

El vector está representado en color rojo en la Figura 4. La dirección de mayor crecimiento de la función a partir del (1,1) viene dada por la dirección y sentido del vector gradiente de la función en dicho punto. En cualquier otro punto del plano, el gradiente sería paralelo al vector gradiente en (1,1).

Para identificar la curva de nivel máximo, se desplazan las curvas de nivel (las rectas) en la dirección y sentido del vector gradiente. Si se observa la Figura 4, las *curvas de nivel* crecen al hacerlo *k* y lo hacen indefinidamente, por lo que la función no está acotada y no tiene máximo finito.

Para identificar la curva de nivel mínimo, el proceso es análogo pero el desplazamiento de las curvas de nivel se realiza en la dirección y sentido del vector opuesto al gradiente, $-\nabla f(1,1)$ (representado en color azul en la Figura 4). Se puede observar que las *curvas de nivel* decrecen al hacerlo *k* y lo hacen de forma indefinida, por lo que la función no tiene mínimo finito.

Figura 4. Resolución gráfica *del problema* $Opt \quad x + 2y$.



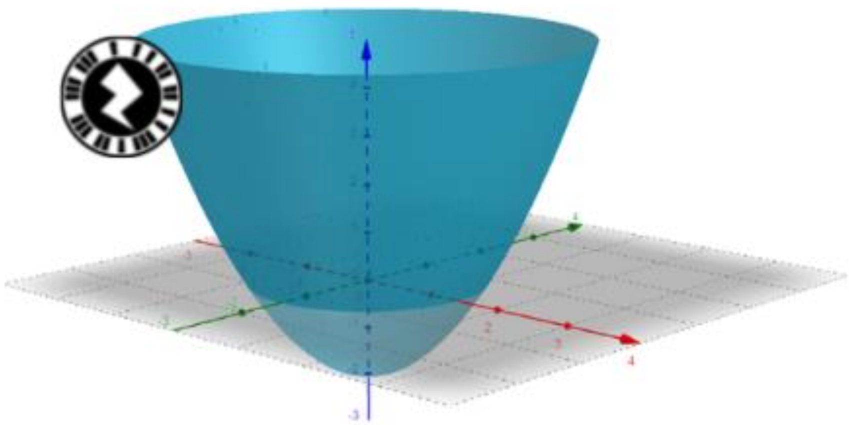
Ejemplo 2

Consideremos la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$.

La superficie que se obtiene al representar gráficamente en R^3 la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$ es un paraboloide, cuyos puntos pertenecen al siguiente conjunto:

$$\left\{(x,y,z) \in R^3 / z = x^2 + y^2 - 2,\ \forall (x,y) \in R^2\right\} = \left\{(x,y,x^2+y^2-2) \in R^3, \forall (x,y) \in R^2\right\}$$

Figura 5. Representación gráfica de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$.

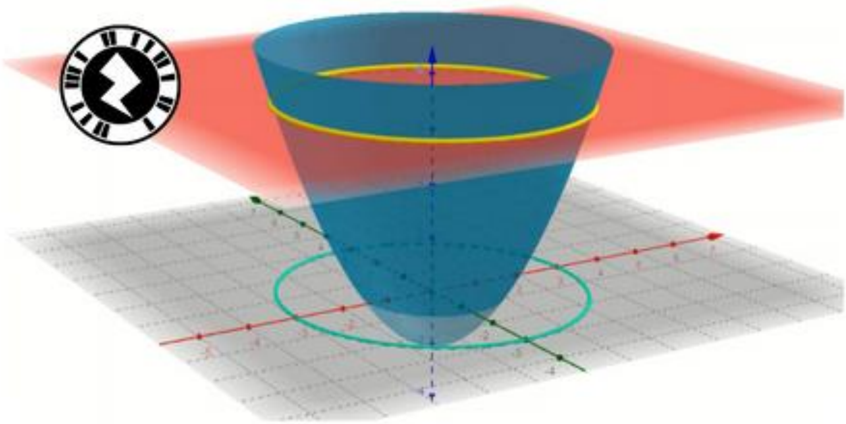


Como ejemplo, calculamos la *curva de nivel 7*:

$$C_7 = \{(x,y) \in R^2 /\ f(x,y) = 7\} = \{(x,y) \in R^2 /\ x^2 + y^2 - 2 = 7\} = \{(x,y) \in R^2 /\ x^2 + y^2 = 9\}$$

En el vídeo asociado a la Figura 6 se explica el significado y lo que representa esta curva de nivel, que corresponde con la circunferencia de centro (0,0) y radio 3.

Figura 6. Desarrollo gráfico de la *curva de nivel* 7 de la función $f(x,y)=x^2+y^2-2$.



Pasamos a resolver gráficamente el siguiente problema

$$Opt \quad x^2+y^2-2$$

Para ello, comenzaremos definiendo la ***curva de nivel k*** de la función:

$$C_k=\{(x,y)\in R^2 \,/\, x^2+y^2-2=k\}$$

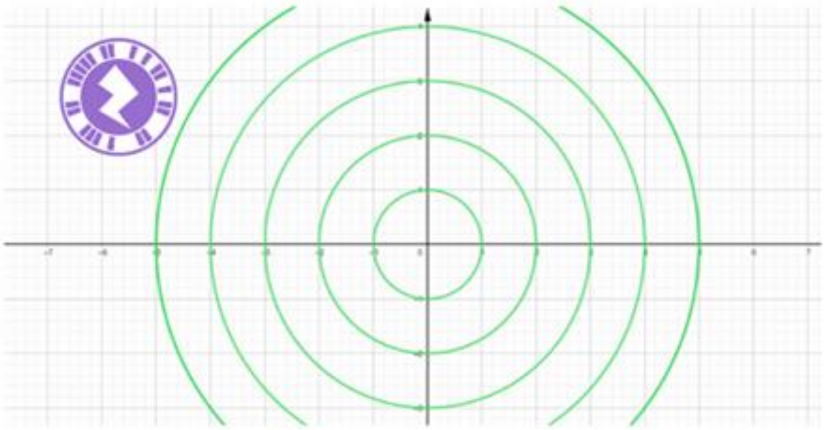
Sus puntos verifican la ecuación:

$$x^2+y^2-2=k \Rightarrow x^2+y^2=k+2$$

que pertenece a la circunferencia de centro (0,0) y radio $\sqrt{2+k}$ para cualquier valor de k mayor o igual que -2, $(\forall k\in R/2+k\geq 0)$.

El *mapa de curvas de nivel* de la función $f(x,y)=x^2+y^2-2$ está formado por las circunferencias de centro (0,0), como se observa en la Figura 7 y cuya representación se expone en el vídeo.

Figura 7. Representación de las *curvas de nivel* de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$.



El ***vector gradiente*** de la función a optimizar es:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

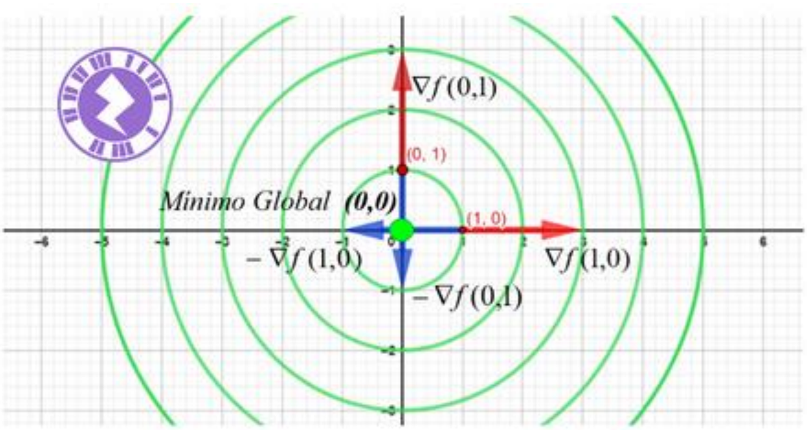
Este vector depende del valor que tomen las variables, es decir, del punto en el que se calcule. Tomamos, por ejemplo, el (1,0) y el (0,1), y calculamos el gradiente en estos dos puntos:

$$\nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En la Figura 8 aparecen representados en color rojo. Ambos vectores indican la dirección de mayor crecimiento de la función a partir de dichos puntos, es decir, a partir del (1,0) y del (0,1), respectivamente. La función crece al aumentar el valor del radio de las circunferencias (*curvas de nivel*) que crece indefinidamente al hacerlo k. Por lo tanto, no es posible identificar la curva de nivel máximo y la función no tiene máximo finito.

Para encontrar el mínimo, se consideran los vectores $-\nabla f(1,0)$ y $-\nabla f(0,1)$ (representados en color azul en la Figura 8). Estos vectores indican la dirección de mayor decrecimiento de la función a partir de dichos puntos. En este caso, indican que la función decrece al hacerlo el radio de las circunferencias, es decir, al decrecer k. En este caso, es posible identificar la *curva de nivel* mínimo en la circunferencia de menor radio, es decir, de radio 0 que corresponde a la *curva de nivel* k=-2. Por lo tanto, la función tiene un mínimo global único o estricto en el único punto que pertenece a la *curva de nivel -2*, es decir, en (0,0).

Figura 8. Resolución gráfica *del problema Opt* x^2+y^2-2.



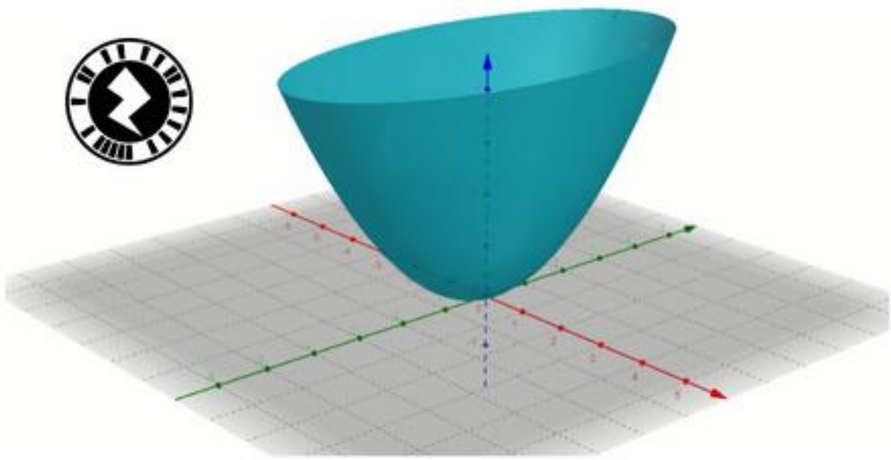
Ejemplo 3

En este ejemplo partimos de la función $f(x, y) = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$.

La superficie que se obtiene al representar gráficamente la función en R^3 es un paraboloide cuyos puntos pertenecen al siguiente conjunto:

$$\left\{ (x, y, z) \in R^3 \,/\, z = x^2 + \frac{y^2}{4},\ \forall (x, y) \in R^2 \right\} = \left\{ \left(x, y, x^2 + \frac{y^2}{4} \right) \in R^3, \forall (x, y) \in R^2 \right\}$$

Figura 9. Representación gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$.

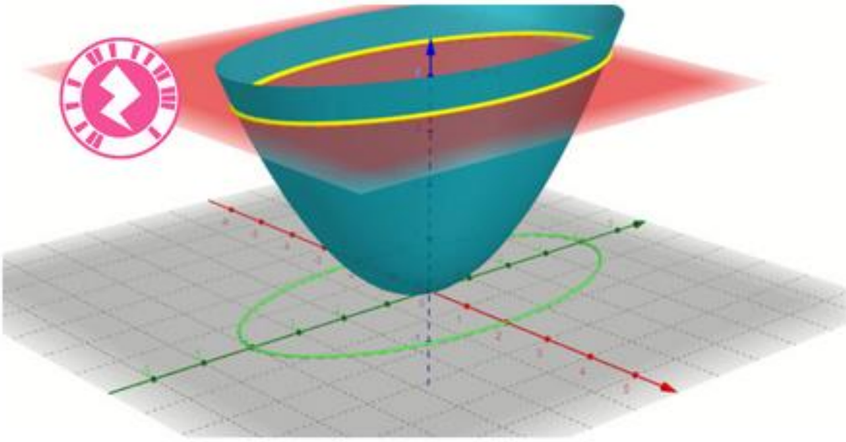


Como ejemplo de *curva de nivel* de la función, calculamos *la curva de nivel 4*:

$$C_4 = \{ (x, y) \in R^2 \,/\, f(x, y) = 4 \} = \{ (x, y) \in R^2 \,/\, x^2 + \frac{y^2}{4} = 4 \}$$

En el vídeo asociado a la Figura 10 se expone cómo identificar gráficamente esta curva de nivel a partir de la representación del plano z=4 junto a la representación gráfica de la función. Esta curva corresponde a la elipse de centro (0,0) y semiejes 2 y 4.

Figura 10. Desarrollo gráfico *curvas de nivel* de la función $f(x,y) = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$.



Planteamos el siguiente problema de optimización sin restricciones:

$$Opt \quad f(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4}$$

La ***curva de nivel k de la función*** es:

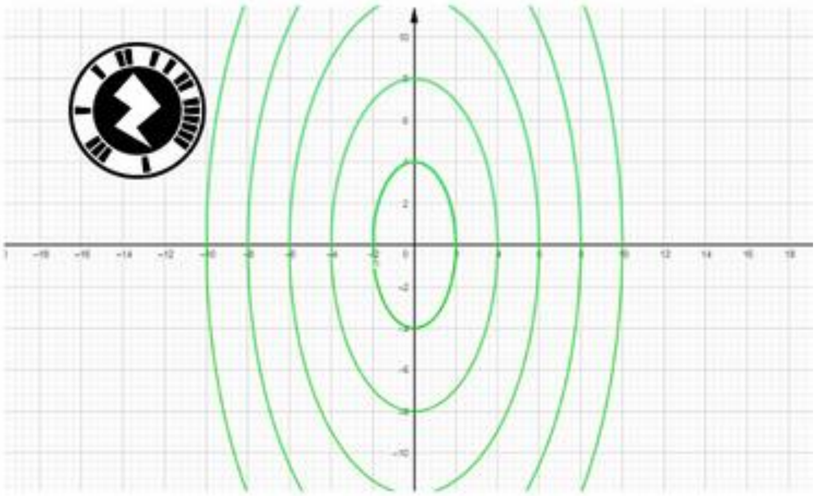
$$C_k = \{(x,y) \in R^2 \ / \ x^2 + \frac{y^2}{4} = k\}$$

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = k \Rightarrow \frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{4k} = 1 \quad \text{para} \quad k \neq 0$$

que corresponde a la elipse de centro (0,0) y semiejes $\sqrt{k}$ y $2\sqrt{k}$ para cualquier valor de k mayor que 0 $(\forall k \in R / k > 0)$. Para $k = 0$, la curva de nivel estaría integrada por un solo punto, el (0,0).

Como se puede observar en la Figura 11, el *mapa de curvas de nivel* de la función $f(x,y) = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$ está formado por las elipses de centro (0,0) y semiejes $\sqrt{k}$ y $2\sqrt{k}$, $(\forall k \in R / k > 0)$, y el punto (0,0) ($k = 0$).

Figura 11. Representación de las curvas de nivel de la función $f(x,y) = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$.



El ***vector gradiente*** de la función a optimizar es

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ \dfrac{y}{2} \end{pmatrix}$$

El vector gradiente depende del valor que tomen las variables, lo vamos a calcular en dos puntos, por ejemplo, en (2,0) y en (0,4):

$$\nabla f(2,0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(0,4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

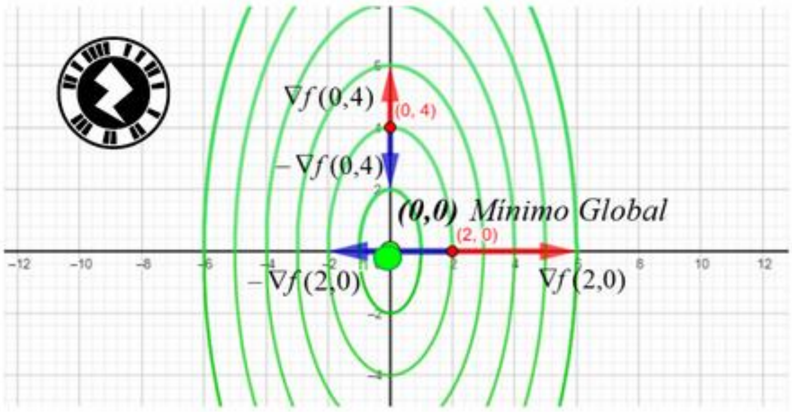
Representamos estos vectores en la Figura 12 (en color rojo). Cada vector indica la dirección y sentido en el que la función experimenta el mayor crecimiento desde el punto correspondiente. En este caso, las *curvas de nivel* representan elipses, cuyos semiejes aumentan su valor al hacerlo k. El valor de k puede crecer de forma indefinida, por lo que la función no está acotada y no tiene máximo finito.

Para encontrar el mínimo, se consideran los vectores anteriores multiplicados por (-1):

$$-\nabla f(2,0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad -\nabla f(0,4) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(representados en la Figura 12 en color azul). Estos vectores indican que las *curvas de nivel* decrecen al decrecer los semiejes de las elipses, es decir, del decrecimiento de las *curvas de nivel* se produce hacia el centro de las elipses. En este caso, es posible identificar la *curva de nivel mínimo* para el valor k=0. Por lo tanto, la función tiene un mínimo global estricto en el único punto que pertenece a la *curva de nivel 0*, es decir, en (0,0).

Figura 12. Resolución gráfica del problema $Opt \quad f(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4}$.



Ejemplo 4

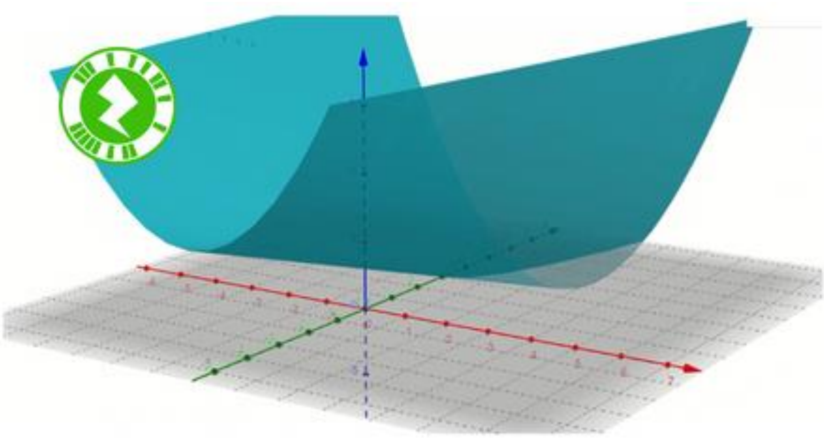
En este ejemplo planteamos la función

$$f(x,y) = x^2 - y + 3$$

Los puntos de la superficie que se obtiene al representar gráficamente en R^3 la función $f(x,y) = x^2 - y + 3$ pertenecen al conjunto:

$$\left\{(x,y,z) \in R^3 / z = x^2 - y + 3,\ \forall (x,y) \in R^2\right\} = \left\{\left(x,y,x^2 - y + 3\right) \in R^3, \forall (x,y) \in R^2\right\}$$

Figura 13. Representación gráfica de la función $f(x,y) = x^2 - y + 3$.

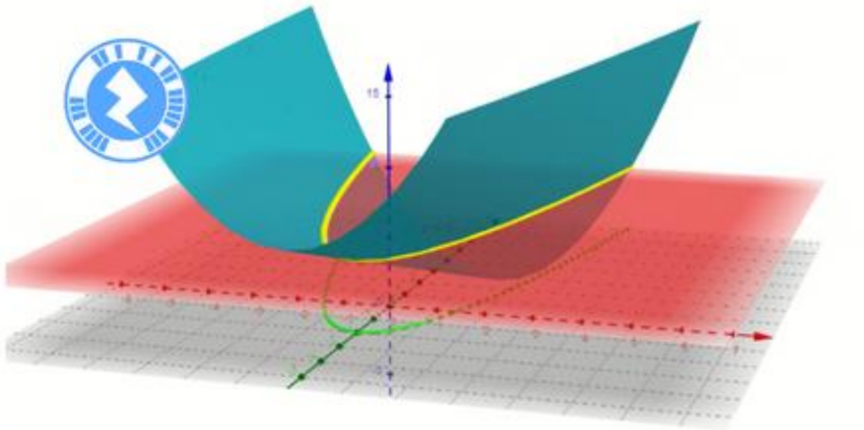


La *curva de nivel 5* de la función objetivo es:

$$C_5 = \{(x,y) \in R^2 /\ x^2 - y + 3 = 5\}$$

que corresponde a la parábola cuyos puntos verifican la ecuación $y = x^2 - 2$, simétrica respecto al eje de ordenadas y vértice en el punto $(0,-2)$.

Figura 14. Desarrollo gráfico *curvas de nivel* de la función $f(x,y) = x^2 - y + 3$.



La ***curva de nivel k*** de esta función es:

$$C_k = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x^2 - y + 3 = k\} \text{ para } \forall k \in R .$$

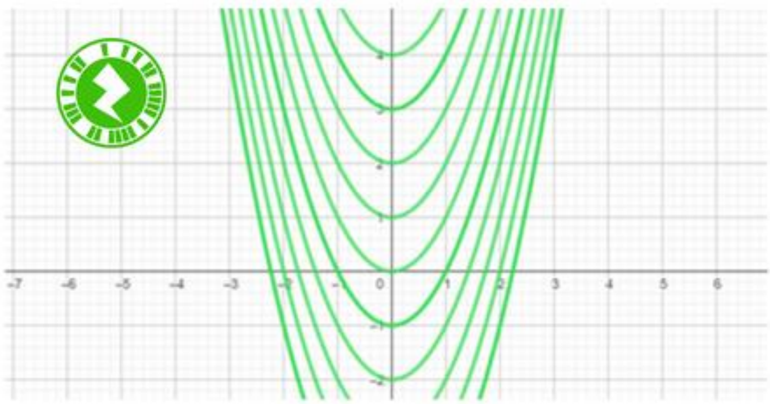
La ecuación que verifican los puntos de esta curva de nivel es:

$$x^2 - y + 3 = k \Rightarrow y = x^2 + 3 - k$$

que corresponde a la parábola con eje de simetría la recta *x=0*, coeficiente del término cuadrático 1 y vértice en el punto $(0, 3-k)$ para $\forall k \in R$.

El *mapa de curvas de nivel* de la función $f(x,y) = x^2 - y + 3$ está formado por aquellas parábolas con eje de simetría en el eje de ordenadas y coeficiente del término cuadrático 1 (misma forma y apertura), como se puede observar en la Figura 15.

Figura 15. Representación de las curvas de nivel de la función $f(x,y) = x^2 - y + 3$.



El ***vector gradiente*** de la función es:

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\-1\end{pmatrix}$$

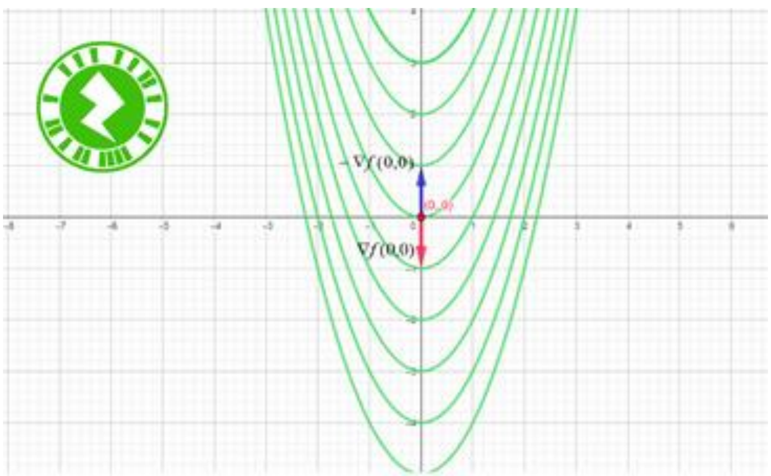
Este gradiente lo calculamos en un punto, por ejemplo, en (0,0):

$$\nabla f(0{,}0)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

La dirección y sentido del vector anterior (representado en la Figura 16 en color rojo) indica que la función crece desde dicho punto al aumentar el valor de k (*curvas de nivel*), desplazándose dichas *curvas de nivel* en la parte negativa del eje de forma indefinida. No es posible identificar la *curva de nivel máximo*, por lo que la función no tiene máximo finito.

El vector $-\nabla f(0{,}0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ (representado en la figura 16 en color azul) indica la dirección y sentido de mayor decrecimiento de la función desde el punto (0,0). Las *curvas de nivel* decrecen al hacerlo k, desplazándose las parábolas de forma indefinida en la parte positiva del eje de ordenadas, por lo que no es posible identificar la *curva de nivel mínimo*. Por lo tanto, la función no tiene mínimo finito.

Figura 16. Resolución gráfica del problema $Opt \quad f(x,y)=x^2-y+3$.



Bloque II

Resolución gráfica de problemas de optimización con restricciones en R^2.

Los problemas de optimización con restricciones tienen por objeto encontrar los valores de las variables, que sujetos a determinadas restricciones, optimizan (maximizan o minimizan) la función objetivo.

La formulación general de los problemas de optimización de funciones de dos variables con restricciones es:

$$\begin{array}{ll} Opt & f(x,y) \\ s.a. & g_i(x,y) \leq b_i \quad i = 1,\ldots,m \\ & h_j(x,y) = c_j \quad j = 1,\ldots.,p \end{array}$$

donde:

- $f : D \subseteq R^2 \to R$ es la *función objetivo* y D su dominio de definición
- $g_i: R^2 \to R$, $i = 1,2,\ldots.,m$ y $h_j: R^2 \to R$, $j = 1,2,\ldots.,p$ son las funciones asociadas a las restricciones del problema
- $b_i \in R,\quad i = 1,\ldots,m$ y $c_j \in R,\quad j = 1,\ldots,p$.

El conjunto

$$X = \left\{(x,y) \in D \subseteq R^2 \ / \ g_i(x,y) \leq b_i,\ \ h_j(x,y) = c_j, i = 1,\ldots m, j = 1,\ldots,p\right\}$$

se denomina *conjunto factible*. En los problemas de optimización sin restricciones, este conjunto coincide con el dominio de la función objetivo.

La formulación general del problema de optimización con restricciones se puede escribir ahora como

$$\begin{array}{ll} Opt & f(x,y) \\ s.a. & (x,y) \in X \end{array}$$

donde (x,y) es el *vector de las variables de decisión* que pertenece al *conjunto factible* $X \subseteq R^2$. Cada $(x,y) \in X$ se denomina *solución factible.*

La función tiene un ***mínimo local*** en el punto $(x^*, y^*) \in X$, si existe un entorno de dicho punto $E(x^*, y^*)$, tal que $f(x^*, y^*) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in E(x^*, y^*) \cap X$.

La función tiene un ***máximo local*** en el punto $(x^*, y^*)^* \in X$, si existe un entorno de dicho punto $E(x^*, y^*)$ tal que $f(x^*, y^*) \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in E(x^*, y^*) \cap X$.

La función tiene un ***mínimo global*** en el punto $(x^*, y^*) \in X$, si $f(x^*, y^*) \leq f(x, y)$ para $\forall\ (x, y) \in X$.

La función tiene un ***máximo global*** en el punto $(x^*, y^*) \in X$, si $f(x^*, y^*) \geq f(x, y)$ para $\forall\ (x, y) \in X$.

En el caso en que las desigualdades anteriores sean estrictas para $(x, y) \neq (x^*, y^*)$, los óptimos globales son estrictos o únicos.

Para garantizar la existencia de máximo y mínimo global, el problema debe verificar las hipótesis del ***Teorema de Weierstrass***:

Si el *conjunto factible* $X \subseteq R^2$ es cerrado y acotado y la función $f : R^2 \to R$ es continua en X, entonces la función alcanza al menos un máximo y un mínimo global en X.

Resolución gráfica.

La resolución de un problema de optimización de una función cuyas dos variables que deben verificar una serie de restricciones puede abordarse gráficamente. Para ello, nos basamos en los dos elementos que se han utilizado para la resolución gráfica de problemas sin restricciones, las curvas de nivel y el vector gradiente de la función a optimizar, que en este caso se representan en el conjunto factible X. Es decir, nos centramos en considerar solo las curvas de nivel que interceptan con el conjunto factible y el gradiente de aquellos puntos que pertenecen a dicho conjunto.

La resolución consiste en obtener los puntos del conjunto factible en los que una determinada curva de nivel alcanza el nivel óptimo, ya sea máximo o mínimo. Para encontrar el máximo o los máximos del problema, se desplazan las curvas de nivel en la dirección y sentido del vector gradiente en puntos del conjunto factible. Si el problema es de minimizar, el desplazamiento de las curvas de nivel se realiza en la dirección y sentido del vector opuesto al anterior. En ambos casos, este desarrollo permite identificar (si existen) los puntos del conjunto factible pertenecientes a la curva de nivel máximo o mínimo, respectivamente.

Ejemplos.

En los tres ejemplos siguientes se expone cómo encontrar gráficamente los máximos y mínimos de una función de dos variables sujetas a una o varias restricciones. En los ejemplos 5 y 7 se ha incluido una figura en la que se representa su correspondiente conjunto factible y a la que se ha asociado un vídeo en el que se explica cómo se identifica el conjunto en el plano.

Identificado el conjunto factible, el siguiente paso sería representar el mapa de curvas de nivel de la función objetivo de cada problema. Estas curvas de nivel ya han sido identificadas y representadas en los ejemplos del Bloque I, por lo que se hace referencia al ejemplo y Figura correspondiente dónde se puede consultar su desarrollo completo.

Por último, en el vídeo asociado a la figura que aparece al final de cada ejemplo se representa el gradiente de la función en un punto del conjunto factible y se procede a la identificación de los máximos y/o mínimos del problema, si existen.

Ejemplo 5.

Sea el problema

$$\begin{aligned} &Max \quad x+2y \\ &s.a.: \; x^2+y\le 1 \end{aligned}$$

El conjunto factible de este problema es:

$$X=\{(x,y)\in R^2 \,/\, x^2+y\le 1\}$$

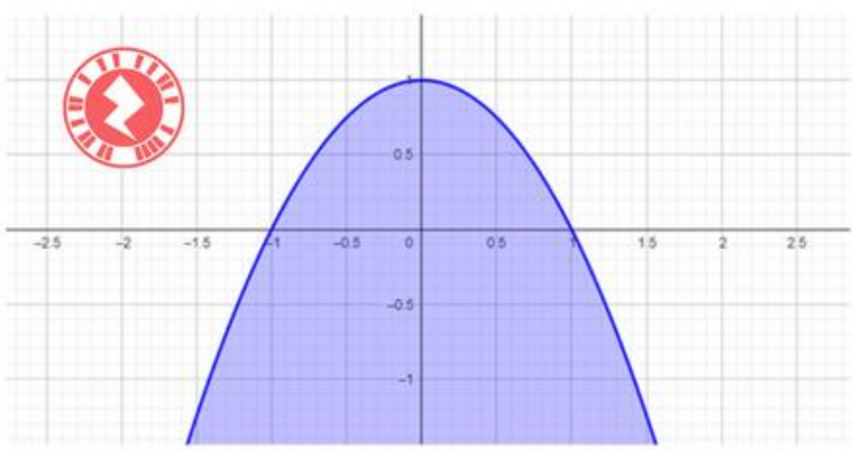
Para representar dicho conjunto en el plano, primero se representa la parábola $y=1-x^2$ que divide al plano en dos recintos. Para identificar el que corresponde al conjunto factible *X*, se elige un punto que no pertenezca a la parábola y se sustituye en la inecuación que define al conjunto *X*. Si el punto elegido la verifica entonces pertenece al conjunto factible, en caso contrario, el conjunto factible se corresponde con el recinto contrario.

Por ejemplo, tomemos el punto (0,0) y sustituimos sus coordenadas en la inecuación:

$$0^2+0\le 1$$

El punto la verifica por lo que pertenece al conjunto factible X , identificado como la parábola y su interior.

Figura 17. Representación del conjunto factible $X=\{(x,y)\in R^2 \,/\, x^2+y\le 1\}$.



El conjunto factible que aparece en la imagen anterior no es un conjunto acotado, por lo que no se verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass y no se puede garantizar la existencia de óptimos globales.

Una vez representado el conjunto factible, se aborda la representación de las curvas de nivel de la función objetivo. La expresión de la ***curva de nivel k*** es:

$$C_k = \left\{(x, y) \in R^2 \,/\, f(x, y) = k\right\} = \left\{(x, y) \in R^2 \,/\, x + 2y = k\right\} = \left\{(x, y) \in R^2 \,/\, y = \frac{k}{2} - \frac{x}{2}\right\}$$

para cualquier valor de $k \in R$.

El *mapa de curvas de nivel* de esta función está formado por las rectas de pendiente $-\frac{1}{2}$ (ver el ***ejemplo 1***, Figura 3). En este caso, nos centramos en las *curvas de nivel* que interceptan con el conjunto factible, es decir, que tienen puntos en común con la parábola y su interior.

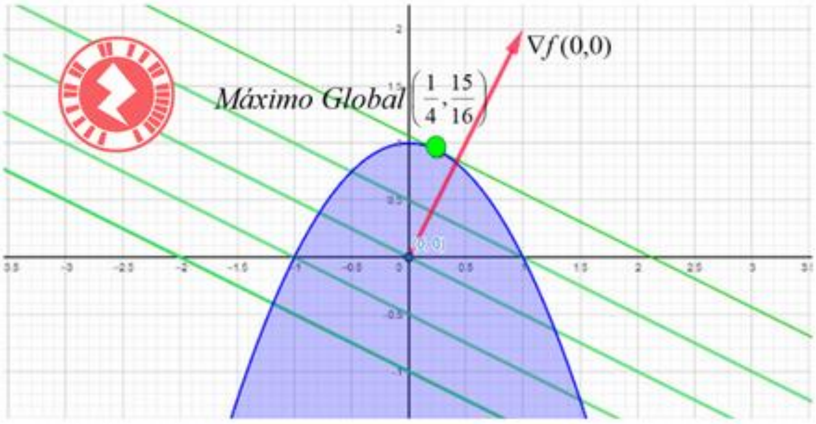
El gradiente de la función se calcula en un punto del conjunto factible, por ejemplo, en (0,0):

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para encontrar el máximo del problema, se representa el vector anterior (en color rojo en la Figura 18) que indica la dirección y sentido de máximo crecimiento de la función objetivo desde dicho punto. Si se desplazan las curvas de nivel (las rectas de pendiente $-\frac{1}{2}$) según nos indica el vector gradiente, se observa que existe una curva de nivel máximo que intercepta con el conjunto factible en un punto que corresponde al máximo global. En este caso, el punto es $\left(\frac{1}{4}, \frac{15}{16}\right)$ y la curva de nivel máximo corresponde a la curva de nivel $\frac{17}{8}$.

El desarrollo de la resolución gráfica se expone en el vídeo asociado a la figura 18.

Figura 18. Resolución gráfica del problema.



NOTA: Si el problema hubiera sido de minimizar, se desplazarían las curvas de nivel en la dirección y sentido de mayor decrecimiento de la función objetivo (sentido opuesto al del vector gradiente representado) en el *conjunto factible*. En este caso, las curvas de nivel decrecen indefinidamente y siguen teniendo puntos en común con el *conjunto factible*, por lo que no es posible encontrar la curva de nivel mínimo que intercepta con el conjunto factible. No hay mínimo finito.

Ejemplo 6.

Sea el problema

$$\begin{array}{ll} Min & x^2 - y + 3 \\ s.a. & x^2 + y^2 \leq 25 \end{array}$$

El conjunto factible de este problema es:

$$X = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 25\}$$

y su representación en el plano corresponde a la circunferencia de centro (0,0) y radio 5, y a su interior (representada en color violeta en la Figura 19).

En este caso, el conjunto factible es un conjunto cerrado y acotado, y la función objetivo es continua, por lo que se verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass y se puede garantizar la existencia de óptimos globales, al menos un máximo y un mínimo globales.

A continuación, se identifica la ***curva de nivel k*** de la función objetivo:

$$C_k = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x^2 - y + 3 = k\} = \{(x,y) \in R^2 \,/\, y = x^2 + 3 - k\} \text{ para } \forall k \in R \text{ .}$$

que corresponde a la parábola con eje de simetría la recta $x=0$, coeficiente del término cuadrático 1 y vértice en el punto $(0, 3-k)$ para $\forall k \in R$. El cálculo y representación gráfica del mapa de curvas de esta función se ha realizado en el ***ejemplo 4*** (Figura 15). En este problema, nos enfocamos en las *curvas de nivel* que tienen puntos en común con la circunferencia y su interior.

El gradiente de la función se calcula en un punto de *conjunto factible*, por ejemplo, el (0,0).

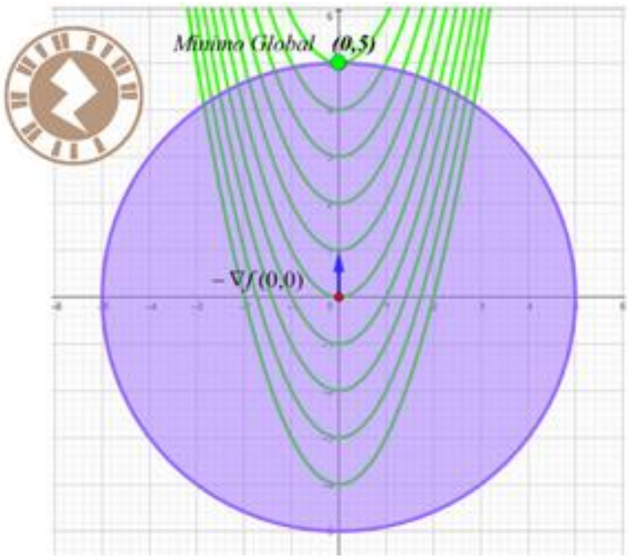
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para identificar el mínimo del problema, representamos el vector $-\nabla f(0,0)$ que indica la dirección y sentido del máximo decrecimiento de la función objetivo a partir de dicho punto (representado en color azul en la Figura 19).

Para resolver gráficamente el problema, realizamos un proceso análogo al del ejemplo anterior. En este caso, desplazamos las curvas de nivel atendiendo al vector $-\nabla f(0,0)$ en sentido ascendente en el eje de ordenadas, identificándose la curva de nivel mínimo que intercepta con el conjunto factible en el punto (0,5), que corresponde al mínimo global del problema.

El desarrollo de la resolución gráfica se expone en el vídeo asociado a la figura 19.

Figura 19. Resolución gráfica del problema.



NOTA: Si el problema hubiera sido de maximizar, el vector $\nabla f(0,0)$ indicaría la dirección y sentido de mayor crecimiento de la función desde el punto (0,0) en el conjunto factible. La curva de mayor nivel que intercepta con el conjunto factible lo hace en dos puntos, que son los máximos globales del problema.

Ejemplo 7.

Sea el problema

$$\begin{array}{ll} Opt & x^2 + y^2 - 2 \\ s.a. & x + y \leq 6 \\ & \quad x \geq 1 \\ & \quad y \geq 0 \end{array}$$

El *conjunto factible* de este problema corresponde a la intersección de tres semiespacios:

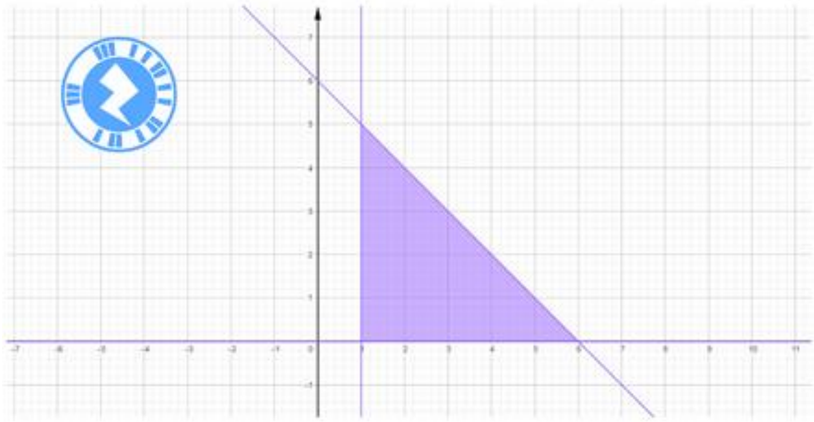
$$X = \{(x, y) \in R^2 \,/\, x + y \leq 6,\ x \geq 1,\ \ y \geq 0\}$$

Para representar gráficamente este conjunto es necesario representar cada uno de los tres semiespacios. A continuación, se expone cómo representar en el plano el primer semiespacio. Si se representa la recta $x + y = 6$, se pueden observar los dos semiespacios en los que divide al plano. Para identificar a cuál de ellos corresponde la inecuación $x + y \leq 6$, se elige un punto que no pertenezca a la recta y se sustituye en la inecuación anterior. Si el punto la verifica, entonces pertenece al semiespacio. En caso contrario, el punto no pertenece al semiespacio y éste se identifica en la parte del plano en la que no se encuentra el punto. Tomemos, por ejemplo, el punto (0,0), verifica la inecuación ($0 + 0 \leq 6$) y, por lo tanto, pertenece al semiespacio.

De forma análoga, se identifican en el plano el semiespacio $x \geq 1$ y el semiespacio $y \geq 0$.

La intersección de estos tres semiespacios corresponde al *conjunto factible X*. El proceso anterior está desarrollado en el vídeo asociado a la Figura 20.

Figura 20. Representación del conjunto factible $X = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x + y \le 6,\ x \ge 1,\ \ y \ge 0\}$



La función objetivo es continua y el *conjunto factible* es un conjunto cerrado y acotado, por lo que se verifican las hipótesis del Teorema de Weierstrass que afirma la existencia de óptimos globales.

La *curva de nivel k* de la función objetivo es $C_k = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x^2 + y^2 = k\}$ y corresponde a la circunferencia de centro (0,0) y radio $\sqrt{k}$ para cualquier valor de k mayor o igual que 0, $(\forall k \in R / k \ge 0)$. Por lo tanto, el *mapa de curvas de nivel* está formado por las circunferencias de centro (0,0). El cálculo y representación gráfica de las curvas de nivel de esta función se ha realizado en el ***ejemplo 2*** (Figura 7). En este problema, nos enfocamos en las *curvas de nivel* que tienen puntos en común con la circunferencia y su interior.

Para identificar la dirección y sentido en el que la función experimenta el mayor crecimiento, se representa el ***vector gradiente*** en un punto del conjunto factible, por ejemplo, el punto (2,0).

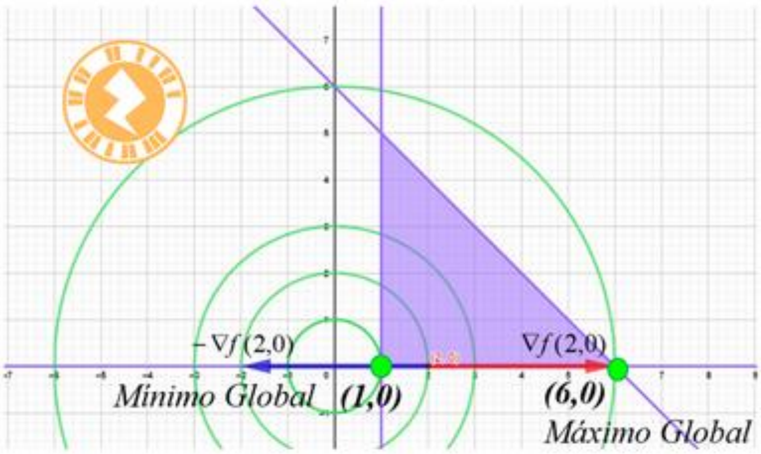
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(2,0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este vector indica que la función experimenta el máximo crecimiento a partir del punto (2,0) en las curvas de nivel que se obtienen al crecer el radio de las circunferencias. Se puede identificar la curva de mayor nivel que intercepta con el conjunto factible (curva de nivel 36) y el punto de intersección de ambas, el punto (6, 0), en el que se alcanza el máximo global del problema.

Para identificar el mínimo, se representa el vector $-\nabla f(2{,}0)$, que indica la dirección y sentido de máximo decrecimiento de la función a partir del punto (2,0). Este se produce en las curvas de nivel que se obtienen al decrecer el radio de las circunferencias. La curva de menor nivel que intercepta con el conjunto factible es la curva de nivel 1 y la intersección se produce en el punto (1,0), en el que la función objetivo alcanza el mínimo global del problema.

El desarrollo de la resolución gráfica se expone en el vídeo asociado a la siguiente Figura.

Figura 21. Resolución gráfica del problema.



ÍNDICE DE FIGURAS (VÍDEOS)

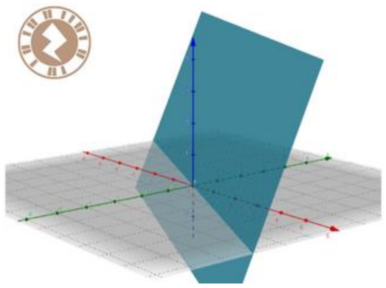
Bloque I

Resolución gráfica

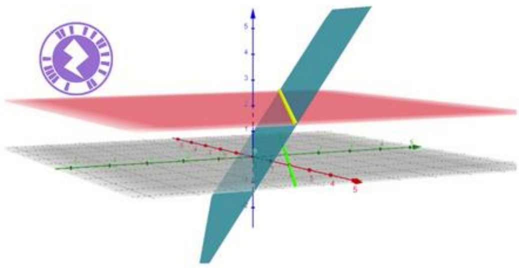
de un problema de optimización sin restricciones en R^2**.**

.

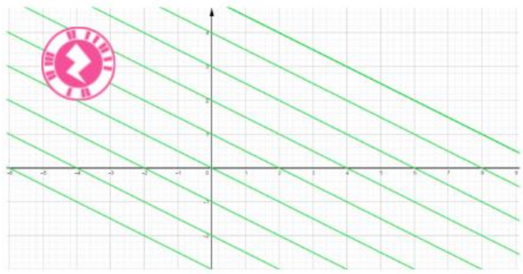
Ejemplo 1. ***Figura 1.***
Representación gráfica de la función $f(x,y)=x+2y$ 12



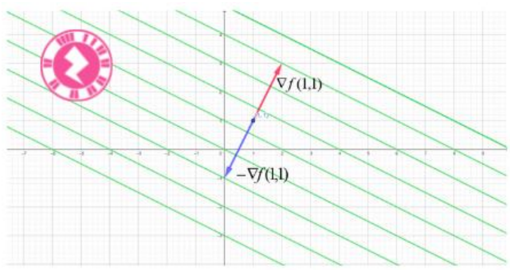
Ejemplo 1. ***Figura 2.***
Desarrollo gráfico de la *curva de nivel 2* de la función $f(x,y)=x+2y$ 13



Ejemplo 1. ***Figura 3.***
Representación del mapa de *curvas de nivel* de la función $f(x,y)=x+2y$ ...…... 13

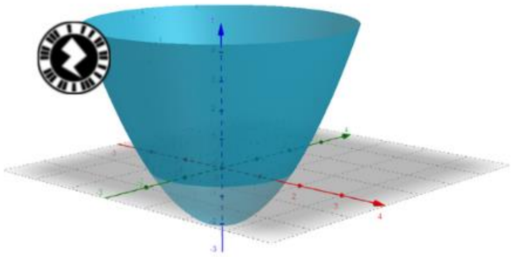


Ejemplo 1. ***Figura 4.***
Resolución gráfica *del problema* *Opt* $x+2y$ ……………………………………..14



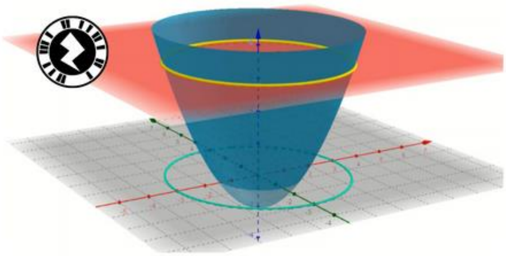
Ejemplo 2. ***Figura 5.***

Representación gráfica de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$ 15



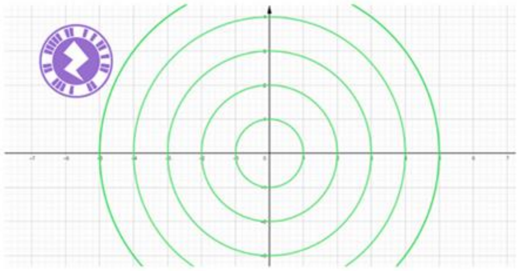
Ejemplo 2. ***Figura 6.***

Desarrollo gráfico de la *curva de nivel* 7 de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$.......16



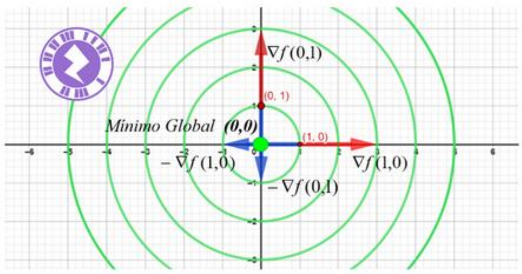
Ejemplo 2. ***Figura 7.***

Representación de las *curvas de nivel* de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$......... 17



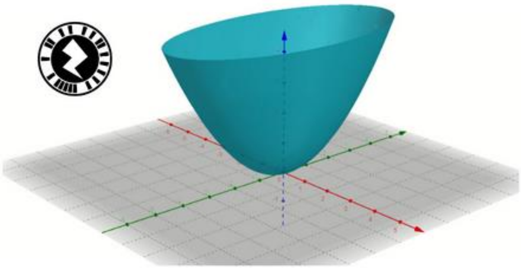
Ejemplo 2. ***Figura 8.***

Resolución gráfica del problema $Opt\ x^2 + y^2 - 2$ 18



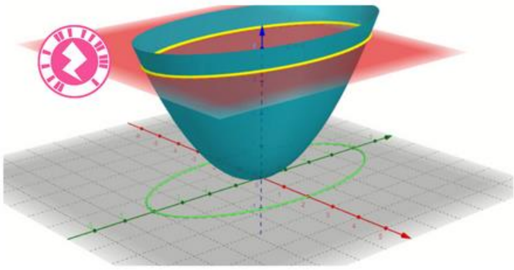
Ejemplo 3. Figura 9.

Representación gráfica de la función $f(x,y)=x^2+\dfrac{y^2}{4}$ …………….................... 19



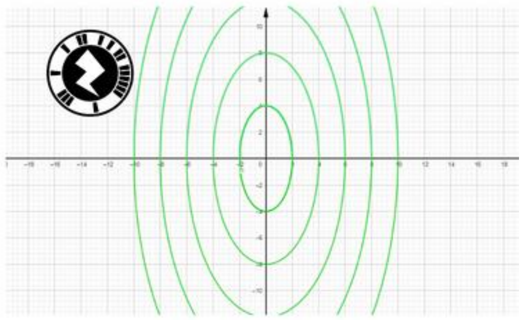
Ejemplo 3. Figura 10.

Desarrollo gráfico *curvas de nivel* de la función $f(x,y)=x^2+\dfrac{y^2}{4}$ ……………... 20



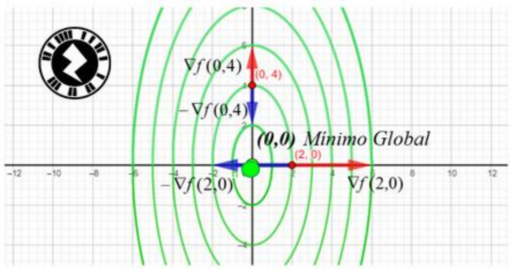
Ejemplo 3. Figura 11.

Representación de las curvas de nivel de la función $f(x,y)=x^2+\dfrac{y^2}{4}$ …………..21



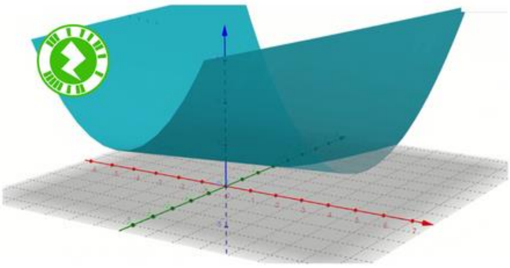
Ejemplo 3. Figura 12.

Resolución gráfica del problema $Opt\ \ f(x,y)=x^2+\dfrac{y^2}{4}$ ………………………... 22



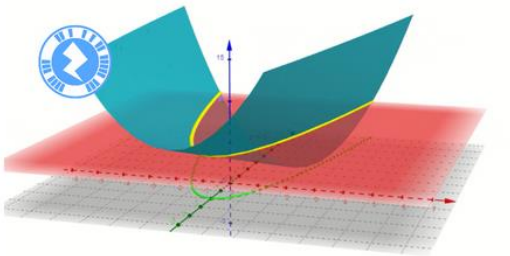
Ejemplo 4. ***Figura 13.***

Representación gráfica de la función $f(x,y) = x^2 - y + 3$ 23



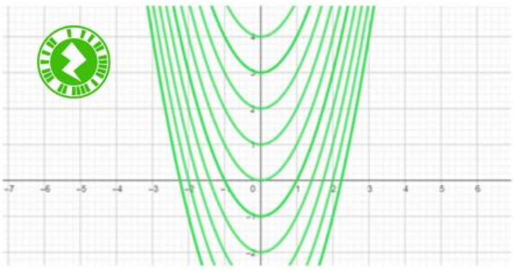
Ejemplo 4. ***Figura 14.***

Desarrollo gráfico *curvas de nivel* de la función $f(x,y) = x^2 - y + 3$ 24



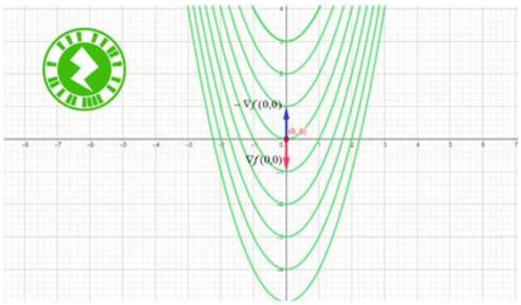
Ejemplo 4. ***Figura 15.***

Representación de las curvas de nivel de la función $f(x,y) = x^2 - y + 3$ 24



Ejemplo 4. ***Figura 16.***

Resolución gráfica del problema $Opt\ f(x,y) = x^2 - y + 3$ 25



ÍNDICE DE FIGURAS (VÍDEOS)

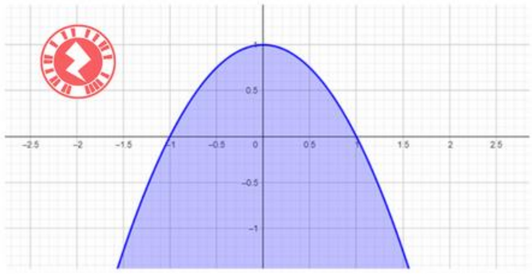
Bloque II

Resolución gráfica de un problema

de optimización con restricciones en R^2.

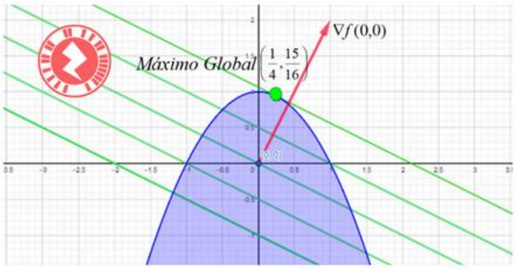
Ejemplo 5. ***Figura 17.***

Representación del conjunto factible $X = \{(x, y) \in R^2 \,/\, x^2 + y \leq 1\}$ 32



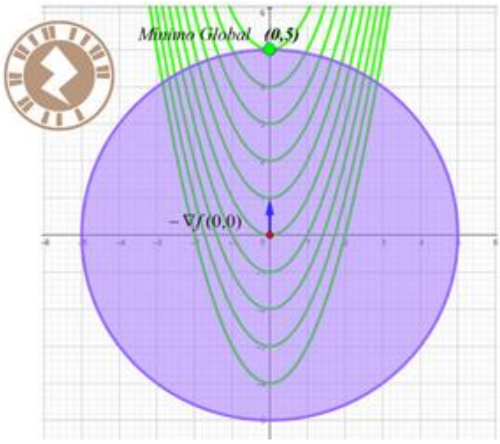
Ejemplo 5. ***Figura 18.***

Resolución gráfica del problema $\begin{array}{l} Max \quad x + 2y \\ s.a.: \;\; x^2 + y \leq 1 \end{array}$ 34



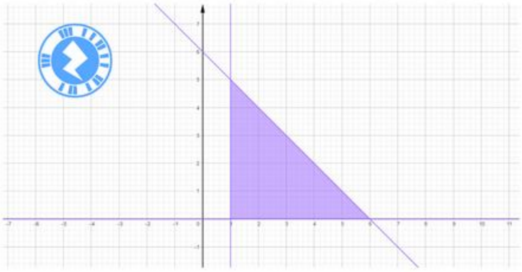
Ejemplo 6. ***Figura 19.***

Resolución gráfica del problema $\begin{array}{ll} Min & x^2 - y + 3 \\ s.a. & x^2 + y^2 \leq 25 \end{array}$ 36



Ejemplo 7. ***Figura 20.***

Representación del conjunto factible $X = \{(x, y) \in R^2 \,/\, x + y \leq 6,\ x \geq 1,\ \ y \geq 0\}$ ... 38



Ejemplo 7. ***Figura 21.***

Resolución gráfica del problema $\begin{array}{ll} Opt & x^2 + y^2 - 2 \\ s.a. & x + y \leq 6 \\ & \quad x \geq 1 \\ & \quad y \geq 0 \end{array}$ ……..……………………………39